Dana HEUBERGER
Gabriel POPA
Adrian ZANOSCHI
Bogdan MAXIM
Cristian HEUBERGER
Marius CICORTAȘ
Adrian BUD

Matematică
pentru excelență

Clasa a VI-a

art Klett

Cuprins

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

1. Mulțimi. Relații între mulțimi

Probleme rezolvate

1.R.1 Mulțimea A este formată din cele mai mici zece numere naturale care, prin împărțire la 13, dau un cât nenul și un rest de două cifre. Suma elementelor mulțimii A este:
a 395; **b** 385; **c** 405; **d** 333.

Soluție. Elementele mulțimii A sunt numere de forma $13 \cdot c + \overline{ab}$, unde $c \in \mathbb{N}^*$, iar $\overline{ab} \in \{10, 11, 12\}$ (restul $\overline{ab}$ este mai mic decât împărțitorul 13). Cum A este formată din cele mai mici zece astfel de numere, rezultă că suma elementelor sale este egală cu $23+24+25+36+37+38+49+50+51+62=395$. Răspuns corect: **a**.

1.R.2 O mulțime M de numere naturale are proprietățile:
(i) 2 este element al lui M;
(ii) dacă $x \in M$, atunci $3x+2 \in M$;
(iii) dacă $x^2+1 \in M$, atunci $x \in M$.
Arătați că mulțimea M conține numerele 1, 4, 5 și 26.

Concursul „Plus minus Poezie" 2011

Soluție. Avem: $2 = 1^2 + 1 \in M \overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} 1 \in M$. Apoi, $1 \in M \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} 5 = 3 \cdot 1 + 2 \in M$. Mai mult, $5 \in M \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} 17 = 3 \cdot 5 + 2 \in M$, așadar $17 = 4^2 + 1 \in M \overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} 4 \in M$. În consecință, obținem: $2 \in M \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} 8 = 3 \cdot 2 + 2 \in M \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} 26 = 3 \cdot 8 + 2 \in M$.

1.R.3 Mulțimea A este alcătuită din cinci numere raționale pozitive. Mulțimea produselor obținute prin înmulțirea a câte două elemente distincte ale mulțimii A este $P = \{0,1;\ 0,15;\ 0,375;\ 1;\ 1,6;\ 2,5;\ 3,75;\ 4;\ 6;\ 40\}$. Determinați mulțimea A.

ONM 2009, Dan Nedeianu

Soluție. În astfel de situații, ordonarea elementelor poate furniza informații importante. Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$, cu $a<b<c<d<e$. Cele mai mici produse de câte două elemente din A sunt $a \cdot b = 0,1$ și $a \cdot c = 0,15$; cele mai mari sunt $c \cdot e = 6$ și $d \cdot e = 40$. Pe de altă parte, înmulțind toate elementele lui P și ținând seama de faptul că fiecare element apare în câte patru produse, obținem că $a^4 b^4 c^4 d^4 e^4 = 81$, de unde $abcde = 3$. Atunci $c = (abcde):(ab \cdot de) = 3:(0,1 \cdot 40) = 0,75$, apoi $a = ac : c = 0,2$, $e = ce : c = 8$, $b = ab : a = 0,5$ și $d = de : e = 5$, așadar $A = \{0,2;\ 0,5;\ 0,75;\ 5;\ 8\}$.

1.R.4 Fie n un număr natural nenul. Notăm cu A mulțimea numerelor naturale cel puțin egale cu 2 care sunt relativ prime cu fiecare dintre numerele 1, 2, ..., n. Demonstrați că mulțimea A conține măcar un număr prim.

Soluție. O idee deseori utilă este aceea de a ne concentra atenția asupra celui mai mare/mic element al mulțimii care apare în problemă și de a vedea ce informații oferă acesta; metoda se numește *Principiul extremal*. Exemplul tipic de asemenea raționament este cel din demonstrația lui Euclid pentru caracterul infinit al mulțimii numerelor prime. Două tipuri de mulțimi se pretează la aplicarea acestui principiu: 1) mulțimile finite de numere (raționale), care au atât un cel mai mare, cât și un cel mai mic element și 2) submulțimile mulțimii numerelor naturale, care au întotdeauna un cel mai mic element.
În cazul nostru, cum A este mulțime de numere naturale, ea va avea un cel mai mic element, fie acesta p. Vom demonstra că p este prim, de unde concluzia problemei. Presupunem, prin reducere la absurd, că $p \geq 2$, ar fi un număr compus; atunci există numărul prim q și numărul natural $k \geq 2$, astfel încât $p = q \cdot k$. Numărul $q \geq 2$, divizor al numărului p, nu poate divide niciunul dintre numerele 1, 2, ..., n, așadar q este element al mulțimii A. Pe de altă parte, q este strict mai mic decât p, ceea ce contrazice faptul că p este cel mai mic element al lui A. Rezultă că presupunerea făcută este greșită, așadar p este un număr prim.

1.R.5 O mulțime S formată din patru numere naturale se numește *completă*, dacă fiecare element al ei se poate scrie ca sumă sau diferență a altor două elemente distincte ale sale.
a Arătați că orice multiplu de 13 se poate scrie ca suma elementelor unei mulțimi complete.
b Determinați numărul submulțimilor complete ale mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$.

ONM 2008, Marius Perianu

Soluție. a Numărul $n = 13k, k \in \mathbb{N}^*$, poate fi scris sub forma: $n = k + 3k + 4k + 5k$, iar mulțimea $S = \{k, 3k, 4k, 5k\}$ este, evident, completă.
b Să vedem întâi cum arată o mulțime completă. Fie $S = \{a, b, c, d\}$, cu $a < b < c < d$, o astfel de mulțime. Observăm că $a \in \{c - b,\ d - b,\ d - c\}$, $b \in \{c - a,\ d - a,\ d - c\}$, $c \in \{d - a,\ d - b,\ a + b\}$ și $d \in \{a + b,\ a + c,\ b + c\}$.
Dacă $d = a + b$, atunci $c = d - a$ sau $c = d - b$, de unde $a + c = d = a + b$, respectiv $b + c = d = a + b$. Rezultă că $c = b$ sau $c = a$, imposibil.
Dacă $d = a + c$, atunci $c = d - a$ și $a = d - c$, deci rămâne că $b = c - a$; deducem că $S = \{a, b, a + b, 2a + b\}$. Cum $3a < 2a + b \leq 50$, rezultă $a \leq 16$ și $a + 1 \leq b \leq 50 - 2a$. Pentru $a = 1, 2, \ldots, 16$, găsim $47 + 44 + \ldots + 5 + 2 = 392$ mulțimi complete de acest tip.
Dacă $d = b + c$, atunci $c = d - b$ și $b = d - c$, deci rămâne că $a = c - b$; deducem că $S = \{a, b, a + b, a + 2b\}$, mulțimi care diferă (prin ultimul element) de cele obținute anterior. Cum $3a < a + 2b \leq 50$, rezultă că $a \leq 16$, iar $a + 1 \leq b \leq \frac{50 - a}{2}$. Considerând $a = 1, 2, \ldots, 16$, găsim $23 + 22 + 20 + \ldots + 4 + 2 + 1 = 192$ mulțimi complete de acest tip.
În total, există $392 + 192 = 584$ de submulțimi complete ale mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$.

Probleme propuse

1.P.1 Se dau mulțimile $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n^2\le 10\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N} \mid x=n^2, n\in\mathbb{N}, n\le 10\}$. Dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:
a $A=B$; **b** $A\subset B$; **c** $A\supset B$; **d** $4\notin A$.

1.P.2 Suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le 2^{100}\}$ este:
a $2^{101}-1$; **b** $2^{99}(2^{101}+1)$; **c** $2^{99}(2^{100}+1)$; **d** $2^{101}+1$.

1.P.3 Suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x=2^k, k\in\mathbb{N}, k\le 100\}$ este:
a $2^{101}-1$; **b** $2^{99}(2^{101}+1)$; **c** $2^{99}(2^{100}+1)$; **d** $2^{101}+1$.

1.P.4 Numerele naturale x și y sunt astfel încât $\{5x+7, 3x+2, 9\}=\{6x, y^2, 2x+3y\}$. Suma $x+y$ este egală cu:
a 12; **b** 10; **c** 9; **d** 7.

1.P.5 Fie mulțimile $A_m=\{m+1, 3m+4, 2m-3\}$ și $B_n=\{4n+2, n+2, n-1\}$, unde $m\ge 2$ și $n\ge 1$ sunt numere naturale. Demonstrați că $A_m\ne B_n$, oricare ar fi numerele naturale $m\ge 2$ și $n\ge 1$, dar există numerele naturale $p\ge 2$ și $q\ge 1$, astfel încât o submulțime cu două elemente a lui A_p să fie egală cu o submulțime a lui B_q.

OJM Iași 2009, Claudiu-Ștefan Popa

1.P.6 Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Numărul submulțimilor $\{a, b, c\}$ ale mulțimii A având proprietatea că $a\cdot c=b^2$ este:
a 1; **b** 2; **c** 3; **d** 4.

1.P.7 Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Numărul submulțimilor nevide ale lui A care au produsul elementelor cel mult egal cu 10 este:
a 22; **b** 23; **c** 25; **d** 26.

1.P.8 Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Numărul submulțimilor nevide ale lui A care au suma elementelor cel puțin egală cu 49 este:
a 7; **b** 12; **c** 13; **d** 14.

1.P.9 Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots, \frac{1}{9900}\right\}$. Demonstrați că suma elementelor lui B nu poate fi număr natural, oricare ar fi submulțimea B a mulțimii A.

OLM Iași 2011

1.P.10 Se consideră mulțimea $M=\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$. Determinați submulțimile A ale mulțimii M care sunt formate din numere naturale consecutive având suma 60.

1.P.11 Se consideră mulțimea $A=\left\{x \middle| x=2^{2n+1}-4^n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că produsul oricăror două elemente ale mulțimii A este tot element al mulțimii A.

1.P.12 Mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ conține 250 de numere care se divid cu 2, dar nu cu 4 și 166 de numere care se divid cu 3, dar nu cu 6. Determinați numărul natural n.

1.P.13 Arătați că mulțimea $A=\{3n, 3n+1, 3n+2, \ldots, 9n\}$ (unde n este număr natural nenul) conține cel puțin o putere a lui 3.

Gazeta Matematică 5/2016, Daniel Stretcu

1.P.14 Determinați mulțimea A de numere naturale nenule care conține numerele 3 și 5 și are proprietatea că, oricare ar fi $x, y\in A$ și $m, n\in\mathbb{N}$, nu ambele nule, avem $mx+ny\in A$.

Concursul „La Școala cu ceas" 2009, Marius Perianu

1.P.15 O mulțime M de numere naturale are proprietățile:
(i) 1 este element al lui M;
(ii) dacă x și y sunt elemente ale lui M, atunci $2x+3y\in M$;
(iii) dacă x și y sunt numere naturale, astfel încât $4x-3y\in M$, atunci $x\cdot y\in M$.
Arătați că mulțimea M conține numerele 2, 3, 4, 5 și 2019.

OJM 2019, Adriana Dragomir și Lucian Dragomir

1.P.16 Elementele mulțimii $M=\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ îndeplinesc simultan condițiile:
(i) există $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$, astfel încât $x_{k+1}=x_k+r$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$;
(ii) $x_3+x_7=x_{10}+1$;
(iii) $\{26,\ 41,\ 76\}\subset M$.
Arătați că $2011\in M$.

Gazeta Matematică 10/2010, Ștefan Smarandache

1.P.17 Spunem că o mulțime M de numere naturale are proprietatea (P), dacă pentru orice element x al lui M avem că $x-4\in M$ sau $\frac{x}{4}\in M$. Arătați că:
a există mulțimi cu cinci elemente care au proprietatea (P);
b dacă M are proprietatea (P), atunci $9\notin M$;
c dacă M are proprietatea (P) și $16\in M$, atunci $0\in M$.

OJM Iași 2010

1.P.18 Determinați mulțimile X și Y care au, simultan, următoarele proprietăți:
(i) fiecare are câte trei elemente, care sunt numere naturale nenule;
(ii) $3\in X$ și $5\in Y$;
(iii) mulțimile X și Y au exact un element comun;
(iv) oricare ar fi x și y elemente distincte ale lui X, suma $x+y$ aparține lui Y.

OJM 2016, Lucian Dragomir

1.P.19 Spunem că o mulțime A de numere naturale nenule este *triunghiulară*, dacă oricare ar fi două elemente a și b ale lui A, există $c \in A \setminus \{a, b\}$, astfel încât a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

a Arătați că mulțimea $\mathbb{N}^*$ a numerelor naturale nenule nu este triunghiulară.

b Pentru fiecare număr natural $n \geq 3$, demonstrați că există o mulțime triunghiulară cu n elemente.

Concursul „Radu Miron” 2003, Gabriel Popa

1.P.20 Determinați mulțimile A și B care au, simultan, următoarele proprietăți:

(i) fiecare are câte trei elemente, care sunt numere naturale nenule;

(ii) $6 \in A$ și $12 \in B$;

(iii) mulțimile A și B au exact un element comun;

(iv) dacă $x, y \in A, x \neq y$, atunci $x \cdot y \in B$.

OJM 2022, Lucian Dragomir

1.P.21 Determinați toate mulțimile alcătuite din trei numere naturale nenule care au proprietatea: *câtul și restul obținute prin împărțirea sumei oricăror două elemente ale mulțimii la cel de-al treilea sunt numere distincte din mulțimea* $\{1, 2, 3\}$.

ONM 2010, Marius Perianu

1.P.22 Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Determinați numărul submulțimilor B cu trei elemente ale mulțimii A care au, simultan, proprietățile:

(i) cel puțin două elemente din mulțimea B sunt numere naturale consecutive;

(ii) există $a \in B$, pentru care $3a \in B$.

OJM 2017, Lucian Dragomir

1.P.23 Se consideră $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$. Aflați numărul submulțimilor lui A formate din patru elemente și care au proprietatea că suma a două elemente este 2006, iar suma celorlalte două este tot 2006.

OJM Iași 2005

1.P.24 O mulțime formată din trei numere naturale se numește *aritmetică*, dacă unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a Determinați numărul de submulțimi ale lui A_{10} care sunt mulțimi aritmetice.

b Arătați că, pentru $n \geq 91$, numărul de submulțimi aritmetice ale lui A_n este mai mare decât 2004.

OJM 2004

1.P.25 O mulțime de numere naturale nenule A cu patru elemente se numește *productivă*, dacă orice element al lui A este produsul sau câtul a două elemente distincte ale lui A.

a Arătați că mulțimea $A = \{2, 6, 12, 24\}$ este productivă.

b Demonstrați că nicio mulțime productivă nu conține numărul 1.

c Determinați numărul submulțimilor productive ale mulțimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

OJM Olt 2009, Marius Perianu

2. Cardinalul unei mulțimi

Probleme rezolvate

2.R.1 Notăm cu M mulțimea numerelor naturale de cinci cifre care coincid cu răsturnatele lor și au suma cifrelor egală cu 30. Cardinalul mulțimii M este:
a 25; **b** 27; **c** 30; **d** 32.

Soluție. Elementele lui M sunt: 29892, 38883, 39693, 47874, 48684, 49494, 56865, 57675, 58485, 59295, 65856, 66666, 67476, 68286, 69096, 74847, 75657, 76467, 77277, 78087, 83838, 84648, 85458, 86268, 87078, 92829, 93639, 94449, 95259 și 96069. Cardinalul lui M este $1+2+3+4+5+5+5+5=30$. Răspuns corect: **c**.

2.R.2 Spunem că o mulțime de numere naturale este *puternică*, dacă suma elementelor este predecesorul unei puteri a lui 2, iar produsul elementelor sale este putere a lui 2. Demonstrați că, pentru fiecare număr natural $n \geq 3$, există o mulțime puternică având cardinalul n.

Soluție. Pentru fiecare număr natural $n \geq 3$, mulțimea $A_n = \{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$ are suma elementelor $2^n - 1$ și produsul elementelor $2^{n(n-1):2}$ (exponentul fiind, evident, un număr natural), deci este o mulțime puternică.

2.R.3 Demonstrați că o mulțime finită, de cardinal n, are 2^n submulțimi.

Soluție. Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulțime finită, de cardinal n. Dacă B este o submulțime a lui A, ne imaginăm următoarea modalitate de colorare a elementelor mulțimii A: elementele lui B le colorăm cu roșu, iar pe cele care nu aparțin lui B le colorăm cu negru. În acest fel, fiecărei submulțimi B a lui A îi corespunde o anumită colorare cu două culori a elementelor lui A și invers, orice colorare cu roșu și negru a elementelor lui A furnizează o submulțime B a lui A (anume mulțimea formată din elementele roșii). Rezultă că numărul submulțimilor mulțimii A este același cu numărul colorărilor cu roșu și negru ale mulțimii A. Pentru fiecare dintre elementele $a_1, a_2, ..., a_n$, avem câte două posibilități de alegere a culorii, prin urmare, numărul colorărilor este $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Cu aceasta, demonstrația este completă.

2.R.4 Dacă A este o mulțime finită, de cardinal n, atunci numărul submulțimilor de cardinal 2 ale lui A este egal cu $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Soluție. a. Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Numărăm mulțimile $B = \{a, b\} \subset A$ „măturând” cu elementul a mulțimea A de la stânga la dreapta și păstrând elementul b mereu la dreapta lui a, pentru a nu număra de mai multe ori aceeași mulțime. Dacă $a = a_1$, atunci $b \in \{a_2, a_3, ..., a_n\}$; găsim $n-1$ mulțimi B. Dacă $a = a_2$, atunci $b \in \{a_3, ..., a_n\}$; obținem

$n-2$ noi mulțimi B ș.a.m.d. Numărul submulțimilor de cardinal 2 ale lui A este, așadar, $(n-1)+(n-2)+\ldots 2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Soluție. b. Fie $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ și $B=\{a, b\}\subset A$. Primul element al lui B se alege dintre cele n elemente ale lui A, iar cel de-al doilea dintre cele $n-1$ rămase. Aparent, avem $n(n-1)$ submulțimi B. Dar acest rezultat nu e corect: regula produsului numără perechile ordonate (a, b), în timp ce într-o mulțime ordinea elementelor nu contează. Așadar, prin procedeul descris, fiecare mulțime B este numărată de câte două ori, deci numărul submulțimilor de cardinal 2 ale lui A este egal cu $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Observație. La fel se arată că, dacă A este o mulțime finită, de cardinal n, numărul submulțimilor de cardinal 3 ale lui A este $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ și, în general, numărul submulțimilor de cardinal k ($k\le n$) ale lui A este $\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$.

2.R.5 Considerăm mulțimea $M=\{\overline{abc}\mid a\cdot b\cdot c\neq 0\}$. Determinați cardinalul maxim al unei submulțimi A a lui M, astfel încât $x+y\neq 1109$, oricare ar fi $x, y\in A$.

Recreații Matematice 1/2009, Petru Asaftei și Gabriel Popa

Soluție. Fiecare dintre cifrele a, b și c trebuie să fie nenulă, deci cardinalul mulțimii M este $9\cdot 9\cdot 9=729$. Dintre elementele lui M, $9\cdot 9\cdot 1=81$ se termină în 9. Grupăm celelalte 648 de elemente în perechi de forma $(x,\ 1109-x)$, cu $x<1109-x$, obținând 324 de perechi. Dacă luăm câte un element din fiecare pereche și toate numerele care se termină în 9, obținem o submulțime A de cardinal 405 care are proprietatea din enunț.
Numărul 405 este cel mai mare posibil: o submulțime B a lui M având mai mult de 405 elemente va conține, conform principiului cutiei, cele două elemente ale unei anumite perechi $(x,\ 1109-x)$, iar suma acestora va fi egală cu 1109.

Probleme propuse

2.P.1 Cardinalul mulțimii $\{2, 8, 32, \ldots, 2048\}$ este:

a 6; **b** 7; **c** 9; **d** 11.

2.P.2 Cardinalul mulțimii $\{1, 3, 6, 10, \ldots, 4950\}$ este:

a 379; **b** 1013; **c** 99; **d** 100.

2.P.3 Cardinalul mulțimii $\left\{\dfrac{25}{37}, \dfrac{29}{43}, \dfrac{33}{49}, \ldots, \dfrac{397}{595}\right\}$ este:

a 92; **b** 93; **c** 94; **d** 95.

2.P.4 Care dintre mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\ 2^{99}\le x\le 2^{100}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\ 2^{0}\le x\le 2^{99}\right\}$ are cardinalul mai mare?

2.P.5 Cardinalul mulțimii $A=\left\{\overline{abc}\middle|\,a,b,c\in\{0,1,2,\ldots,9\},\,a>b>c\right\}$ este:

a 84; **b** 120; **c** 504; **d** 720.

2.P.6 Mulțimea $\{1,2,3,\ldots,n\}$ are 2048 de submulțimi. Numărul natural n este egal cu:

a 10; **b** 11; **c** 12; **d** 13.

2.P.7 Mulțimea $\{1,2,3,\ldots,n\}$ are 286 de submulțimi cu trei elemente. Numărul natural n este egal cu:

a 10; **b** 11; **c** 12; **d** 13.

2.P.8 Numărul mulțimilor A cu proprietatea că $\{1,2,3\}\subset A\subset\{1,2,3,\ldots,10\}$ este:

a 64; **b** 128; **c** 256; **d** 512.

2.P.9 Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. Notăm cu m numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A care conțin numărul 1 și n numărul submulțimilor cu patru elemente ale lui A care conțin numerele 1 și 2. Diferența $m-n$ este egală cu:

a 6; **b** 4; **c** 2; **d** 0.

2.P.10 Se consideră mulțimea $A=\left\{\overline{abc}\mid a,c\text{ cifre pare, }a\ne 0,\,b\text{ cifră impară}\right\}$. Determinați cardinalul lui A și suma elementelor lui A.

2.P.11 Determinați cardinalul mulțimii $A=\left\{a+2b+4c+8d+16e\middle|\,a,b,c,d,e\in\{0,1\}\right\}$.

2.P.12 Se consideră mulțimile:

$$A=\left\{x\mid x=\frac{p-2}{p+1},\,p\in\mathbb{N},1\le p\le 49\right\}\text{ și }B=\left\{y\mid y=\frac{n}{n^2+2},\,n\in\mathbb{N},1\le n\le 50\right\}.$$

Arătați că cele două mulțimi au același cardinal.

OLM Iași 2012

2.P.13 Se consideră mulțimea $M=\{7n+1\mid n\in\mathbb{N},\,n\le 20\}$. Arătați că orice submulțime de cardinal 12 a mulțimii M conține două elemente a căror sumă este 149.

Concursul „Gazeta Matematică și Viitori Olimpici” 2013

2.P.14 Se consideră mulțimea $M=\left\{7^n\mid n\in\mathbb{N}\right\}$. Demonstrați că orice submulțime de cardinal 5 a mulțimii M conține două numere a căror diferență se divide cu 25.

2.P.15 Fie mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,98\}$. Arătați că oricum am alege 50 de elemente ale lui A, printre numerele alese există două având suma cub perfect.

Recreații Matematice 1/2007, Titu Zvonaru

2.P.16 Fie mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,1000\}$. Arătați că oricum am alege 501 de elemente ale lui A, printre numerele alese există două având suma pătrat perfect.

2.P.17 Se consideră mulțimea $A=\{3^a \cdot 5^b \cdot 7^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}^*\}$, iar B este o submulțime a sa având cardinalul cel puțin egal cu 9. Demonstrați că B conține două elemente al căror produs este un pătrat perfect.

2.P.18 Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

a Dați exemplu de submulțime B de cardinal 11 a lui A care are proprietatea: *oricum am lua două elemente din B, cel mai mare divizor comun al lor este cel puțin 9.*
b Arătați că, oricum am alege o submulțime C de cardinal 11 a mulțimii A, există două elemente distincte din C al căror cel mai mare divizor comun este cel mult 9.

OJM 2019, Mihail Bălună

2.P.19 Spunem că o mulțime de numere naturale nenule este *primă*, dacă suma oricăror trei elemente ale sale este un număr prim. Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi prime.

Gazeta Matematică 4/2012, Dan Nedeianu

2.P.20 Fie $A=\{1, 2, 3, \ldots, 3n+2\}$, unde $n \geq 2$ este un număr natural. Determinați cel mai mic număr natural m, pentru care orice submulțime de cardinal m a lui A conține două elemente a căror sumă se divide cu 3.

Recreații Matematice 1/2020, Ioan Viorel Codreanu și Mircea Lascu

2.P.21 Câte submulțimi ale mulțimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ au cardinalul egal cu 50 și nu conțin nicio pereche de numere consecutive?

Recreații Matematice 2/2011, Gheorghe Iurea

2.P.22 Spunem că o mulțime A de numere naturale este *legată*, dacă oricare ar fi $x \in A$, cel puțin unul dintre numerele $x-1$ și $x+1$ aparține lui A.
Considerăm mulțimea $M=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Câte submulțimi legate cu 4 elemente are mulțimea M? Dar submulțimi legate cu 18 elemente?

OJM 2006 & Concursul „Traian Lalescu" 2016

2.P.23 Mulțimea A este formată din opt numere naturale de trei cifre. Fiecărui număr din A i se atașează o etichetă pe care se înscrie suma celor trei cifre ale sale. Fiecărei submulțimi nevide a mulțimii A i se atașează un cod determinat de suma etichetelor numerelor din submulțime. Demonstrați că există cel puțin două submulțimi distincte ale mulțimii A care au același cod.

OJM Suceava 2011, Dan Popescu

2.P.24 Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime de cardinal 1010. Mulțimea S este formată din sumele a câte două elemente diferite din A. Care este cardinalul minim posibil al mulțimii S?

Gazeta Matematică 11/2016, Adrian Boțan

2.P.25 Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime de cardinal 7, iar $S=\{x+y \mid x, y \in A\}$. Știind că S are cardinalul egal cu 13, arătați că suma elementelor lui A se divide cu 7.

ONM 2013 (lista scurtă), Vasile Pop